pensar

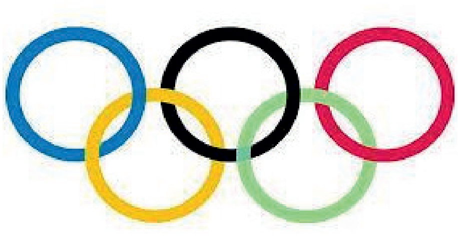
per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu
Departament de Didàctica de les Matemàtiques
i les Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

Escric aquest article durant l'estiu del 2020, aquest any tan estrany a causa de la COVID19 i tot el que està comportant aquesta pandèmia. Tanmateix, el temps de confinament ha estat propici, per a tots els que hem tingut la sort de gaudir de salut, per idear, descobrir, plantejar i resoldre problemes. Per això aquest article és un petit recull d'alguns dels problemes que he conegut i treballat durant els darrers mesos. Al mateix temps, constitueix el meu petit homenatge a tots els que durant aquests temps difícils ens han deixat, des del gran John Conway fins a l'amic Pep Bujosa.

Problema 1. Posant nombres a les anelles olímpiques

Observeu la figura amb les cinc anelles olímpiques entrellaçades: totes elles determinen nou regions tancades. Es tracta de posar en cadascuna d'elles un nombre de l'1 al 9 (sense repetir-ne cap) de manera que la suma dels nombres que hi ha dins de cada cercle sigui la mateixa per a tots els cercles.



Abans de començar a provar amb diferents nombres, penseu com es pot saber quina serà la suma en cada cercle. Aviat trobareu que només hi ha cinc possibilitats (penseu que hi ha quatre nombres que pertanyen a dos cercles i els altres cinc, a només un). Tingueu en compte que, quan tingueu les cinc sumes possibles, no per a totes hi ha una solució, però sí que n'hi ha per a més d'una.

▸ Problema 2. El calendari i els nombres primers

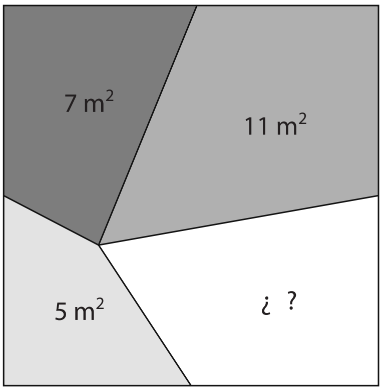
El 23 de març (23-3), quan feia tan sols deu dies que havíem començat el confinament, vaig constatar que era una data ben relacionada amb els nombres primers. No nomes perquè tant el 3 com el 23 són primers, sinó perquè es tracta del dia 83 de l'any i en falten 283 per acabar-lo (compte, som en un any de traspàs), i tant el 83 com el 283 són primers. Hi deu haver altres dies en relació amb els quals tant la data (dia i mes) com els dies transcorreguts i els que falten per acabar l'any siguin tots primers?

Ràpidament descobrireu que en un any «normal» això no pot passar, ja que si l'any «normal» té 365 dies, llavors un dels dos nombres, el dels dies transcorreguts o el dels dies que falten, ha de ser parell (i si és 2, l'únic parell primer, resulta que 363 no ho és). Per tant, si n'hi ha d'altres, hauran de correspondre a un any de traspàs com el 2020.

El següent problema me'l va proposar Joan Gómez, professor de la UPC, col·lega del màster de professorat de secundària de matemàtiques i amic. Em sembla un interessant problema de geometria que té una bonica solució utilitzant únicament la geometria sintètica, molt més ràpida i elegant que la que s'obté aplicant àlgebra.

▸ Problema 3. Divisió d'un quadrat i àrea d'un quadrilàter

Observeu la figura, que hem obtingut de la manera següent: prenem un punt interior qualsevol d'un quadrat i l'unim amb els punts mitjans dels quatre costats del quadrat. Es formen quatre figures que són quadrilàteres. Si coneixem l'àrea de tres d'elles, quina serà l'àrea de la quarta?



Només us diré que no cal fer grans i tediosos càlculs algebraics, ja que aplicant elements de geometria es pot resoldre el problema de manera elegant.

Quan l'hagueu resolt, penseu en una possible generalització, és a dir, per a quins altres quadrilàters, a més del quadrat, repetint el mateix procés serà possible trobar l'àrea d'una de les parts, conegudes les altres tres?

I encara una generalització més gran: preneu un polígon regular i uniu un punt interior qualsevol amb els punts mitjans dels costats. Obtindreu quatre quadrilàters. Quina relació additiva pot establir-se entre les àrees de tots els quadrilàters? Cal que el polígon sigui regular o n'hi ha prou amb una altra condició menys forta?

Si no us ha sortit el problema utilitzant mètodes geomètrics per al cas del quadrat i necessiteu una pista, us proposo que resoleu aquest altre problema, una mica més fàcil i al mateix temps útil per resoldre el nostre: en un quadrat prenem un punt interior i l'unim amb els quatre vèrtexs, de manera que es formen quatre triangles. Què podem dir de la suma de les àrees de dos triangles oposats pel vèrtex? Aquest problema és el que Polya anomenaria un estrep per resoldre l'altre i es pot obtenir emprant una de les heurístiques que ens proposava el gran mestre: coneixes un problema similar però més senzill que et pugui ajudar a resoldre el teu problema?

Ja que he parlat de Polya i tenint en compte que aquesta secció té com a objectiu principal proposar problemes, em permeto recordar-vos una petita llista d'heurístiques que m'han estat útils quan un problema se'm resisteix. He elaborat aquest llistat amb Abraham de la Fuente per a la sessió sobre resolució de problemes, dins del curs Activitats Riques i Competències Matemàtiques a l'Aula de Secundària. Només presento una llista, sense comentaris (fer-ho implicaria un altre article!), per mostrar la riquesa i varietat de les heurístiques:

- Visualitzar relacions (amb dibuixos, i/o esquemes).
- Organitzar les dades (amb taules) i/o elaborar diagrames (arbre, altres).
- Triar un llenguatge adequat i/o una codificació.
- Realitzar proves, experimentar amb les dades i les condicions.
- Emprar assaig i error.
- Realitzar un treball sistemàtic.
- Cercar pautes o regularitats.
- Estudiar casos particulars / particularització: simplificació de dades.
- Generalitzar / estudiar un problema més general.
- Dividir el problema en parts / subdivisió dels objectius.
- Procedir per analogia / relacionar el problema amb un d'anàleg conegut.
- Introduir elements auxiliars / graons intermedis.
- Començar pel final / suposar el problema resolt.
- Emprar idees matemàtiques especials, com la paritat, la simetria, el principi del colomar...

El següent problema és el meu petit homenatge en aquesta secció al gran matemàtic i creador de jocs de Liverpool John Horton Conway (1937-2020), que el passat 11 d'abril va morir a Princeton, New Jersey, a causa de la Covid19. El seu immens llegat romandrà durant molt de temps i ens mostrarà el geni d'aquest gran creador.

Es tracta de trobar la llei de formació de dues successions. La primera és extreta del fantàstic llibre *The Book of Numbers*, la lectura del qual us recomano molt, mentre que la segona, més senzilla, té relació amb una de les successions més famoses de les matemàtiques, el nom de la qual recorda a un important matemàtic medieval.

▸ **Problema 4. La successió «audioactiva».** Considereu la successió tal que els seus primers termes són:

1

11

21

1211

111221

312211

13112221

Es tracta de descobrir com es forma cada terme a partir de l'anterior. Si voleu pensar-ho una estona, no seguiu llegint. Quan el resoleu o us «rendiu» (en aquest cas, es tracta d'una endevinalla difícil), podeu llegir el comentari següent, que, amb tota seguretat, us permetrà resoldre'l si no ho havíeu fet encara.

L'endevinalla amaga, al meu parer, una notable dificultat pel fet que un dígit pot tenir dos significats: com a objecte i com a propietat que expressa la quantitat d'objectes. Amb aquesta idea i tenint en compte que el seu nom és *audioactiva*, tracteu de «llegir» cadascun dels números per descobrir la llei de formació.

Ara us proposo una altra successió, per tal que trobeu el terme següent i el terme general. Estic segur que, tot i que és igual de bonica, trobar la recurrència no serà tan difícil com en el cas anterior.

1

12

121

12112

12112121

1211212112112

Us podeu fer altres preguntes interessants sobre aquesta successió, com ara quantes xifres té cada terme, o bé quina és la suma de les xifres de cada terme. Finalment, com que és possible que hagueu trobat una recurrència que requereixi haver fixat els dos primers termes, us proposo que trobeu la llei de formació quan només coneixeu el primer terme.

Acabaré l'article d'avui amb un problema de nombres una mica més difícil que els anteriors. Me'l va proposar Ramón Villanueva, al qual, al seu torn, l'hi havia proposat Jaume Paradís, tots dos professors de matemàtiques de la Universitat Pompeu Fabra, i el cert és que em va tenir força temps entretingut.

▸ Problema 5. Diferència de quadrats

Observeu que el número 7 es pot escriure com a diferència de dos quadrats, ja que $7 = 16 - 9$. Es tracta de trobar quins són els nombres enters positius que poden expressar-se com a diferència de dos quadrats i provar que per a tots aquests hi ha almenys una solució, mentre que per a la resta no hi ha solució possible.

Un cop hagueu trobat quins són aquests nombres, tracteu de determinar de quantes maneres diferents un determinat nombre es pot expressar com a diferència de quadrats. Per exemple, 7 només admet una diferència (16 − 9, que és la donada en l'exemple anterior) mentre que 9 es pot expressar com 25 − 16 i també com a 9 − 0.

Això és tot. Desitjo que, quan llegiu aquest article, les coses hagin millorat molt, especialment pel que fa a la sanitat, però també a l'economia i a les problemàtiques educatives derivades de la pandèmia, que ens fa molta falta, i, en particular, que gaudiu de molta salut.

Bibliografia

Conway H.J., Guy, R. (1996). *The Book of Numbers*. Nova York: Springer.

Deulofeu, J. (2019). *La magia de los números.* Barcelona: Gedisa.

Deulofeu, J. (2020). *Relojes, medidas y calendarios*. Barcelona: Gedisa.